

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

Giáo trình

PHƯƠNG PHÁP SỐ

Dùng cho sinh viên ngành công nghệ thông tin



NHÀ XUẤT BẢN BƯU ĐIỆN

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

Giáo trình

PHƯƠNG PHÁP SỐ

Dùng cho sinh viên ngành Công nghệ thông tin

Biên soạn: TS. PHAN ĐĂNG CẦU
ThS. PHAN THỊ HÀ

NHÀ XUẤT BẢN BƯU ĐIỆN

Mã số: GT 03 HM 07

LỜI NÓI ĐẦU

Giáo trình Phương pháp số (một số trường đại học gọi là Phương pháp tính) là một giáo trình không thể thiếu đối với sinh viên học ngành Công nghệ thông tin. Giáo trình này cung cấp các kiến thức cơ bản về xấp xỉ, sai số, các phương pháp số trong đại số tuyến tính, các phép nội suy và hồi quy, cách tính gần đúng các biểu thức như đạo hàm, tích phân, tìm nghiệm gần đúng của phương trình phi tuyến, phương trình vi phân.

Nhằm phục vụ công tác đào tạo, Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông biên soạn, xuất bản cuốn giáo trình “Phương pháp số” dùng cho sinh viên ngành Công nghệ thông tin. Bên cạnh việc đảm bảo nội dung cơ bản của một cuốn giáo trình “Phương pháp số”, cuốn sách này còn giới thiệu sơ lược về phương pháp thử ngẫu nhiên để tính toán các đại lượng tất định - phương pháp Monte-Carlo - giúp sinh viên tự tìm hiểu và ứng dụng những kết quả tính toán trong thực tế.

Để đảm bảo tính ứng dụng cũng như giúp cho việc thực hành của sinh viên, bên cạnh việc giới thiệu chi tiết về thuật toán giáo trình còn giới thiệu các chương trình thể hiện thuật toán cài đặt bằng ngôn ngữ C++. Đặc biệt kết quả chương trình không chỉ thể hiện bằng các bảng số mà còn xây dựng thành các đồ thị, điều này giúp cho sinh viên dễ dàng đánh giá trực quan kết quả của thuật toán. Việc thể hiện thuật toán bằng ngôn ngữ lập trình đòi hỏi phần giới thiệu khá dài, do đó trong phần lý thuyết thuật toán chỉ giới thiệu đoạn chính của chương trình, các học viên có thể tham khảo chương trình đầy đủ trong phần phụ lục của cuốn sách này.

Hy vọng cuốn sách không chỉ là giáo trình cho sinh viên các ngành Công nghệ thông tin của Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông mà còn là tài liệu tham khảo hữu ích cho sinh viên các trường kỹ thuật khác và các bạn đọc quan tâm.

HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG

Chương 1

SỐ XẤP XỈ VÀ SAI SỐ

1.1. TỔNG QUAN VỀ PHƯƠNG PHÁP SỐ

1.1.1. Phương pháp số là gì?

Phương pháp số (numerical method) hay đôi khi còn được gọi là Phương pháp tính (Computational method), Toán học tính toán (Computational mathematics) hoặc Giải tích số (Numerical analysis) là một lĩnh vực của toán học chuyên nghiên cứu các phương pháp giải gần đúng các bài toán bằng cách dựa trên những *dữ liệu số* cụ thể và cho *kết quả cũng dưới dạng số*. Nói gọn hơn, phương pháp số như bản thân tên gọi của nó, có nghĩa là phương pháp giải các bài toán bằng những con số cụ thể.

Trong phương pháp số ta thường quan tâm đến hai vấn đề:

- **Phương pháp** để giải bài toán.
- Mối liên hệ giữa lời giải số gần đúng và lời giải đúng, hay vấn đề *sai số* của lời giải.

Giải gần đúng nghĩa là lời giải của ta so với lời giải đúng có một sai số nào đó. Thông thường sai số do rất nhiều nguồn tạo nên và nhiều lúc rất khó tính toán chính xác là bao nhiêu, thậm chí ngay cả việc đưa ra một ước lượng gần sát với thực tế cũng khó có thể đạt được. Khi áp dụng một công thức lý thuyết vào thực tế, ví dụ áp dụng công thức tính diện tích hình tròn π^2 để tính diện tích đáy của một bể chứa nước chẳng hạn, ta không thể có được số π chính xác. Tùy thuộc vào yêu cầu của bài toán cụ thể, có khi ta chọn số π xấp xỉ bằng 3,14, có khi là 3,14159, hay chính xác hơn nữa 3,141595360... Có thể nói rằng có rất nhiều người đã áp dụng cách tính gần đúng để giải quyết một vấn đề

thực tế nào đó, mặc dầu chưa được trang bị những kiến thức cần thiết về phương pháp số. Một nhà kinh tế khi hoạch định chính sách, thực hiện tính toán để dự báo về xu thế phát triển của một ngành kinh tế nào đó chẳng hạn, cũng thực hiện rất nhiều tính toán gần đúng, và có thể nói rằng trong phần lớn các trường hợp họ không đưa ra được một ước lượng là sai số khoảng bao nhiêu; hay một kỹ sư xây dựng khi tính toán để xây dựng một ngôi nhà, anh ta thực hiện rất nhiều phép tính, có khi chỉ bằng máy tính bỏ túi, rất khó xác định sai số tích lũy trong quá trình tính toán. Vậy mà anh ta vẫn hoàn thành công việc, và ngôi nhà xây xong có vẻ đạt tiêu chuẩn kỹ thuật. Có nghĩa là trong thực tế nhiều khi ta phải giải quyết những vấn đề mà ta biết là có sai số, nhưng bằng kinh nghiệm nghề nghiệp ta có cảm giác là sai số như vậy chấp nhận được hay không, và chấp nhận lời giải mà không hề có một đánh giá về sai số. Vậy thì môn học phương pháp số có thực sự cần thiết không? Học nó ta sẽ thu được lợi ích gì? Có thực sự cần thiết cho công việc chuyên môn của ta sau này không? Câu trả lời của chúng tôi là có, nhất là khi ta phải tính toán để giải một bài toán kỹ thuật đòi hỏi độ chính xác cao. Ta biết rằng trong máy tính các số có thể biểu diễn dưới nhiều dạng khác nhau, ví dụ số thực có thể biểu diễn với độ chính xác bình thường (single), độ chính xác gấp đôi (double) hay độ chính xác mở rộng (extended). Nếu ta biết được mối liên hệ giữa lời giải số với lời giải đúng, sẽ biết nên chọn độ chính xác nào để kết quả đáp ứng được yêu cầu thực tế. Ngay cả những lĩnh vực mà ta cảm thấy rằng không cần tính toán chính xác như điều tra nghiên cứu các vấn đề xã hội chẳng hạn, để các kết quả có căn cứ khoa học, ta phải tiến hành tính toán các khoảng tin cậy, khi đó cần tính toán xấp xỉ tích phân các hàm số phức tạp như hàm Gama ($\Gamma(x)$), hàm Beta ($B(x)$),... nghĩa là ta cần đến công cụ phương pháp số.

Để có thể thấy rõ thêm sự lựa chọn mô hình, và sau đó là lựa chọn phương pháp tính toán, đôi khi có ảnh hưởng lớn như thế nào đến kết quả thu được, ta xét một ví dụ đơn giản sau đây:

Giả sử trong bài toán của ta có việc phải tính biểu thức $(\sqrt{2} - 1)^{10}$. Áp dụng công thức nhị thức Newton ta có công thức đúng:

$$(\sqrt{2} - 1)^{10} = 3363 - 2378\sqrt{2} \quad (1.1)$$

Giá trị của 2 vế của (1.1) vào khoảng 0,000148676. Trong thực tế, ta không tính được giá trị chính xác của $\sqrt{2}$ (khoảng 1,41421356240), mà chỉ tính được giá trị gần đúng. Bảng sau đây cho các kết quả của vế trái và vế phải của (1.1) ứng với các giá trị gần đúng của $\sqrt{2}$.

$\sqrt{2}$	Vế trái	Vế phải
1,4	0,0001048576	33,8
1,41	0,00013422659	10,02
1,414	0,000147912	0,508
1,41421	0,00014866399	0,00862
1,414213563	0,00014867678	0,0001472

Ta có thể thấy rằng cách tính trực tiếp có kết quả khá ổn định, không bị tác động nhiều bởi sai số tính $\sqrt{2}$. Trong lúc đó cách tính dùng nhị thức Newton lại bị tác động rất lớn khi sai số thay đổi. Ngay cả khi ta lấy $\sqrt{2} \approx 1,41421$, tức là sai số tính $\sqrt{2}$ nhỏ hơn 0,000005 thì kết quả của vế phải vẫn còn khác rất xa so với giá trị thật.

Vậy rõ ràng khi cần tính biểu thức trên ta nên chọn phương pháp trực tiếp thì sẽ nhận được kết quả chính xác hơn. Còn nếu đã chọn phương pháp dùng khai triển nhị thức Newton thì ta phải chọn giá trị xấp xỉ của $\sqrt{2}$ với độ chính xác khá cao, nếu không thì kết quả sẽ bị sai lệch rất nhiều.

1.1.2. Những dạng sai số thường gặp

Trong thực hành có khi bài toán của ta là tìm cách tính toán xấp xỉ một mô hình toán học đã biết, ví dụ tìm nghiệm của một phương trình đã biết, tính tích phân xác định của một hàm số nào đó trên

khoảng $[a, b]$ cho trước. Tuy vậy ta gặp ngày càng nhiều những bài toán thực tế mà ngay cả mô hình toán học cũng chưa biết. Ví dụ, ta phải dự báo về số lượng thuê bao điện thoại trong một vài năm tới, số người truy nhập Internet,... Trong những trường hợp này ta phải bắt đầu từ việc thu thập số liệu, xây dựng mô hình rồi tìm phương pháp tính toán... Nói chung khi thực hiện một bài toán bằng phương pháp số ta thường gặp những loại sai số sau đây:

Sai số trong việc mô hình hóa bài toán, do ta không thể tính được hết những yếu tố ảnh hưởng đến bài toán, hoặc do ta biết được những yếu tố ảnh hưởng nhưng phải đơn giản hóa mô hình để có thể tính toán được. Ví dụ khi cần tính dung lượng của bể chứa nước hình trụ, ta biết rằng đáy của hình trụ không phải là một hình tròn chính xác, nhưng vẫn giả thiết là hình tròn để việc tính toán được dễ dàng hơn. Hoặc khi cần lập một mô hình biểu diễn các quan hệ kinh tế, ta biết rằng các mối quan hệ đó nói chung rất phức tạp, ví dụ không phải là tuyến tính, nhưng do không thể xác định được các yếu tố đó ảnh hưởng như thế nào nên trong nhiều trường hợp ta vẫn chấp nhận mô hình tuyến tính...

Sai số phương pháp - Là sai số của mỗi phương pháp dùng để tìm lời giải gần đúng. Trong ví dụ tính nhị thức Newton trên đây ta thấy rằng cùng một giá trị xấp xỉ của $\sqrt{2}$ nhưng phương pháp tính trực tiếp cho kết quả chính xác hơn phương pháp dùng khai triển nhị thức Newton.

Sai số của số liệu - Khi đo đạc bằng máy móc hoặc bằng các dụng cụ chuyên dụng ta chỉ đạt được độ chính xác nhất định. Máy móc hiện đại thường cho kết quả đo chính xác hơn.

Sai số tính toán - Sai số do ta làm tròn khi tính toán.

Những sai số trên đây tổng hợp lại nhiều khi dẫn đến những lời giải quá cách xa so với lời giải đúng và vì vậy không thể dùng được. Chính vì vậy việc tìm ra những thuật toán hữu hiệu để giải các bài toán thực tế là điều rất cần thiết. Các phương pháp số đã được sử dụng có